平成２０年度推薦入学者選抜適性試験・解答例

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい．

(1) 方程式 $(x+2)(x-2)=2x$ を解きなさい．

(2) 2桁(けた)の正の整数がある．その十の位の数と一の位の数との和は 9 で，元の整数に 9 だけ加えると，十の位の数と一の位の数とを入れ替えて出来る 2 桁の整数の 3 倍に等しいという．十の位の数を x，一の位の数を y とおく．このとき，x , y に関する連立方程式を作り，x , y の値を求めなさい．

(3) 関数 $y=ax^2$ において，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき y の変域が $0 \leqq y \leqq 9$ であるという．このとき，定数 a の値を求めなさい．

(4) $\dfrac{5}{18}-\dfrac{7}{24}+\dfrac{4}{45}$ を計算しなさい．

(5) a , b を数とする．「$a^2=b^2$ ならば，$\underline{a=b}$ である．」が正しいかどうか判定し，正しいと考える場合は〇印を，正しくない場合は×印を解答用紙に記入しなさい．さらに，正しくないと判定した場合は，正しい文章になるよう下線部分を書き直しなさい．なお，正しいと判定した場合，そのことを証明する必要はありません．

(6) $\sqrt{1-\left(\dfrac{122}{123}\right)^2}$ を，123^2 や 122^2 の値を求めないで済(す)むように工夫(くふう)して計算しなさい．

（解） (1) 方程式を変形して，$x^2-2x-4=0$

$(x-1)^2=5$ と変形できるので，

$x-1=\pm\sqrt{5}$

よって，解は，$x=1\pm\sqrt{5}$

解の公式を使って，$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{5}}{2}=1\pm\sqrt{5}$ と計算しても可

(2) 条件より，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} x+y=9 & \cdots① \\ 10x+y+9=3(10y+x) & \cdots② \end{cases}$$

② を整理すると，$7x-29y=-9$　　$\cdots②'$

$7\times① - ②'$ を計算して，$36y=72$

よって，$y=2$

これを ① に代入して，$x=9-y=9-2=7$

従って，$x=7$, $y=2$

(3) 関数のグラフを考えると，$x=-2$ のとき $y=9$ にならなければならない．

よって，$9=(-2)^2a$

従って，$a=\dfrac{9}{4}$

(4) $\dfrac{5}{18}-\dfrac{7}{24}+\dfrac{4}{45}=\dfrac{5}{2\times 3^2}-\dfrac{7}{2^3\times 3}+\dfrac{4}{3^2\times 5}=\dfrac{5^2\times 2^2-7\times 3\times 5+4\times 2^3}{2^3\times 3^2\times 5}$

$$=\dfrac{100-105+32}{2^3\times 3^2\times 5}=\dfrac{27}{2^3\times 3^2\times 5}=\dfrac{3}{2^3\times 5}=\dfrac{3}{40}$$

(5) ×（正しくない）

下線部分を，$a=b$ または $a=-b$ とすると良い．($a=\pm b$ も可)

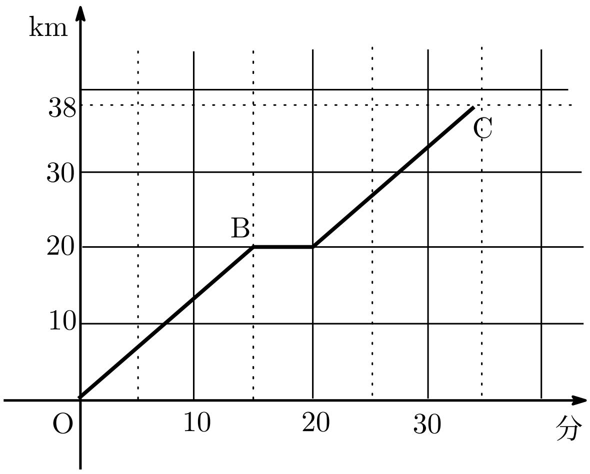
(6) $\sqrt{1-\left(\dfrac{122}{123}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{123^2-122^2}{123^2}}=\sqrt{\dfrac{(123+122)(123-122)}{123^2}}=\sqrt{\dfrac{245}{123^2}}=\sqrt{\dfrac{5\times 49}{123^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{123}$

または，

$$\sqrt{1-\left(\dfrac{122}{123}\right)^2}=\sqrt{\left(1+\dfrac{122}{123}\right)\left(1-\dfrac{122}{123}\right)}=\sqrt{\dfrac{123+122}{123}\times\dfrac{123-122}{123}}$$

$$=\sqrt{\dfrac{245}{123^2}}=\sqrt{\dfrac{5\times 49}{123^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{123}$$

2 A 駅から 20 km , 38 km 離れた B 駅，C 駅がある．A 駅を出発し，時速 80 km で走る普通電車が B 駅に到着後 5 分間停車し再び同じ速度で C 駅まで走った．その様子を表したのが下の図である．このとき，次の問いに答えなさい．



(1) 普通電車が C 駅に到着したのは A 駅を出発して何分何秒後か調べなさい．

(2) 時速 125 km で走る特急電車が，普通電車が B 駅に到着し出発するまでの間に追いつくためには，普通電車が A 駅を出発して何分何秒後から何分何秒後までの間に A 駅を出発すればよいか調べなさい．

(3) 前問と同じ特急電車が，普通電車が A 駅を出発して 15 分後に A 駅を出た．特急電車が普通電車に追いついたのは A 駅からおよそ何 km の地点か，1 次関数を利用して調べなさい．小数第 2 位を四捨五入し小数第 1 位まで求めること．なお，特急電車はノンストップで走るものとする．

（解） (1) まず，時速 80 km で走ると 20 km 離れた B 駅には，$\dfrac{20}{80}\times 60=15$ 分後に到着する

次に，時速 80 km は，分速 $\frac{80}{60} = \frac{4}{3}$ km だから，B , C 駅間 18 km を走るのに要する時間は，

$$18 \div \frac{4}{3} = 18 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{2} = 13 + \frac{1}{2} \text{ 分}$$

よって，A 駅を出発し，33 分 30 秒後に到着する．

(2) 時速 125 km の特急電車が，20 km 走るのに要する時間は，$\frac{20}{125} \times 60 = \frac{48}{5} = 9 + \frac{3}{5}$ 分である．

従って，普通電車が B 駅に着いたとき追いつくためには，$15 - \left(9 + \frac{3}{5}\right) = 5 + \frac{2}{5}$ 分，すなわち，5 分 24 秒に A 駅を出ればよい．

また，普通電車が B 駅を出発するときに追いつくためには，さらに 5 分経過した 10 分 24 秒に出ればよい．

まとめて，5 分 24 秒から 10 分 24 秒の間に出発すればよい．

（別解）普通電車が B 駅に到着したとき特急電車が追いついたとし，このとき，特急電車は A 駅を x 分後に出発したとすると，次が成り立つ．

$$\frac{20}{15 - x} = \frac{125}{60} = \frac{25}{12}$$

よって，$25(15 - x) = 20 \times 12$

これを解いて，$x = \frac{75 - 48}{5} = \frac{27}{5} = 5 + \frac{2}{5} = 5$ 分 24 秒と計算しても良い．

(3) x 分後の電車の位置を y km とする．

普通電車が B 駅を通過後の x , y の関係は，分速 $\frac{4}{3}$ km で，$x = 20$ のとき $y = 20$ だから，$y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$

また，特急電車については，分速 $\frac{125}{60} = \frac{25}{12}$ km で，$x = 15$ のとき $y = 0$ だから，$y = \frac{25}{12}x - \frac{125}{4}$

従って，普通電車に特急電車が追いついた地点を求めるには，次の連立方程式を y について解けばよい．

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3} & \cdots ① \\ y = \frac{25}{12}x - \frac{125}{4} & \cdots ② \end{cases}$$

x を消去するため，$\frac{3}{4} \times ① - \frac{12}{25} \times ②$ を計算すると，

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{12}{25}\right)y = -5 + 15$$

$$\frac{75 - 48}{100}y = 10$$

よって，$y = \frac{1000}{27} = 37.03\cdots$

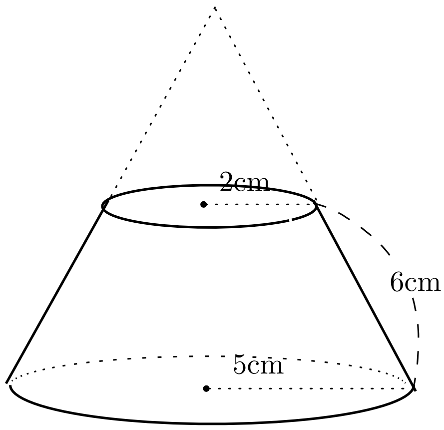
従って，およそ 37.0 km の地点で追いつく．

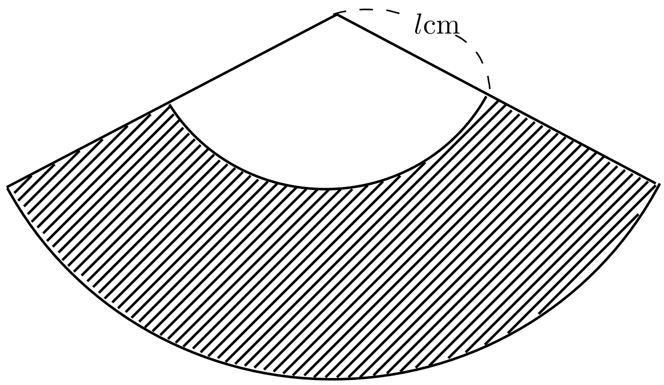
3 図のように，円錐を底面に平行な平面で切った円錐台（えんすいだい）がある．底面の半径が 5cm，上面の半径が 2cm，母線が 6cm とする．このとき，円錐台の側面積を，次のようにして求めなさい．なお，円錐台の側面積を求める公式を使った解答は評価しない．また，円周率を使う必要がある場合は，π のままでよい．

(1) この円錐台の展開図を描くと右図のようになる．図中の l の値を求めなさい．

(2) 側面積を $\mathrm{S}\,\mathrm{cm}^2$ とする．S を求めるには，展開図における大きな扇形（おうぎがた）の面積から小さい扇形の面積を引けばよい．そこで，まず，大きな扇形の面積を l などを使って表しなさい．

(3) S の値を求めなさい．





（解） (1) 展開図における 2 つの扇形の円弧の長さは，それぞれ，4πcm，10πcm で，相似だから，

$$l : (l+6) = 4\pi : 10\pi = 2 : 5$$

が成り立つ．従って，$2(l+6) = 5l$

よって，$3l = 2 \times 6$ だから，$l = 4$

(2) $\pi(l+6)^2 \times \dfrac{10\pi}{2(l+6)\pi} = 5(l+6)\pi\,\mathrm{cm}^2$

(3) $\mathrm{S} = 5(l+6)\pi - \pi l^2 \times \dfrac{4\pi}{2\pi l} = 5(l+6)\pi - 2l\pi = (30+3l)\pi$

$l = 4$ を代入して，$\mathrm{S} = (30+12)\pi = 42\pi$

$\boxed{4}$ 三角形の辺の長さに関する次の問いに答えなさい．

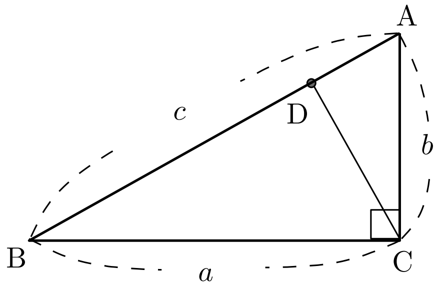
(1) 図 I の直角三角形 ABC の辺の長さに関して，$a^2+b^2=c^2$(三平方の定理という) が成り立つことを証明したい．そこで，点 C から辺 AB に垂線を引き，その交点を D，$\mathrm{AD}=x$ とした．このとき，次の手順に従い証明を完成しなさい．

[i] 相似になる三角形を，記号 $\backsim$ を使い全て書きなさい．なお，相似になることを証明する必要はありません．

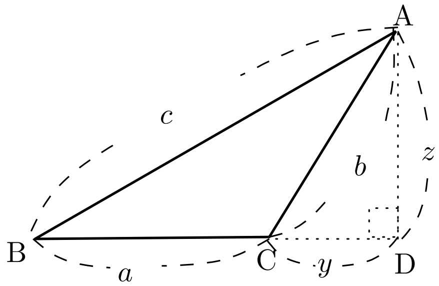
[ii] 相似であることを使って，a, b, c, x の間に成り立つ等式を 2 種類導きなさい．

[iii] [ii] で得られた等式を使い，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つことを証明しなさい．

(2) 図 II の鈍角三角形 ABC($\angle\mathrm{ACB}>90^\circ$) の辺の長さに関して，$a^2+b^2<c^2$ が成り立つことを証明しなさい．



(図 I)



(図 II)

(解) (1) [i] $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{CBD}$, $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{ACD}$, $\triangle\mathrm{CBD}\backsim\triangle\mathrm{ACD}$ の 3 組ある．

[ii] $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{CBD}$ だから，$c:a=a:(c-x)$

よって，$a^2=c(c-x)=c^2-cx$ $\cdots$ ①

次に，$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{ACD}$ だから，$c:b=b:x$

よって，$b^2=cx$ $\cdots$ ②

[iii] ①, ② の辺々を加えると，$a^2+b^2=(c^2-cx)+cx=c^2$

（別解）② を ① に代入して，$a^2=c^2-b^2$

よって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ．

(2) $\mathrm{CD}=y$, $\mathrm{AD}=z$ とおくと，

直角三角形 $\triangle\mathrm{ABD}$ に三平方の定理を適用して，

$$c^2=(a+y)^2+z^2=a^2+2ay+y^2+z^2 \qquad \cdots ③$$

次に，直角三角形 $\triangle\mathrm{ACD}$ に三平方の定理を適用して，

$$b^2=y^2+z^2 \qquad \cdots ④$$

③ に ④ を代入すると，

$$c^2=a^2+b^2+2ay$$

$2ay>0$ だから，$c^2>a^2+b^2$ が成り立つ．