平成１９年度推薦入学者選抜適性試験・解答例

1 y は x に反比例し，そのグラフは点 $(8\,,\,-9)$ を通るという．このとき，次の問に答えなさい．

(1) y を x を使って表しなさい．

(2) この関数のグラフ上の点 $(x\,,\,y)$ で，$x<0$ かつ $x\,,\,y$ は共に整数，更に，y は 3 の倍数であるような点の座標を全て書きなさい．

(解) (1) 反比例だから，$y=\dfrac{k}{x}$ とおくことが出来る．点 $(8\,,\,-9)$ を通るので，$k=8\times(-9)=-72$

よって，$y=-\dfrac{72}{x}$

(2) $xy=-72$ で x が負の整数だから，y は正の整数となる．そこで，$x=-a\,,\,y=b$ とおき，該当する正の整数 $a\,,\,b$ を調べる．

$72=2^3\times3^2$ だから，

a	3×2^3	3×2^2	3×2	3	2^3	2^2	2	1
b	3	3×2	3×2^2	3×2^3	3^2	$3^2\times2$	$3^2\times2^2$	$3^2\times2^3$

よって，条件に適合する点は，

$(-24\,,\,3)\,,\,(-12\,,\,6)\,,\,(-8\,,\,9)\,,\,(-6\,,\,12)\,,\,(-4\,,\,18)\,,\,(-3\,,\,24)\,,\,(-2\,,\,36)\,,\,(-1\,,\,72)$

2 連続する 3 つの整数がある．(3 つの平方の和)$-$(3 つの和)$=398$ であるという．真ん中の整数を x とおいて，次の問に答えなさい．

(1) x に関する方程式を作りなさい．

(2) x の値を求めなさい．

(解) (1) 前後の整数は，$x-1\,,\,x+1$ と表すことが出来るので，x に関する方程式は，

$\{(x-1)^2+x^2+(x+1)^2\}-\{(x-1)+x+(x+1)\}=398$

(2) 方程式を変形して，$\{(x^2-2x+1)+x^2+(x^2+2x+1)\}-3x-398=0$

$3x^2-3x-396=0$

$x^2-x-132=0$

$(x+11)(x-12)=0$

よって，$x=-11\,,\,12$

3 $\sqrt{21+4x-x^2}$ が正の整数になるような，整数 x の値を求めたい．次の手順に従って計算しなさい．

(1) x^2-4x にある定数を加え $(x+a)^2$ の形にした．このときの a の値を求めなさい．

(2) $21+4x-x^2$ を $b-(x+a)^2$ の形にした．このときの b の値を求めなさい．

(3) $\sqrt{21+4x-x^2}$ が正の整数になるような，整数 x の値を全て求めなさい．

(解) (1) x^2-4x に 4 を加えると，$x^2-4x+4=(x-2)^2$

よって，$a=-2$ となる．

(2) (1) より，$x^2-4x+4=(x-2)^2$

よって，$-(x^2-4x+4)=-x^2+4x-4=-(x-2)^2$

この両辺に，25 を加えると，$21+4x-x^2=25-(x-2)^2$ となる．従って，$b=25$

(3) $\sqrt{21+4x-x^2}=\sqrt{25-(x-2)^2}$ となったので，これが正の整数になるのは，$25-(x-2)^2=1\,,\,4\,,\,9\,,\,16\,,\,25$ のときである．

従って，$(x-2)^2=24\,,\,21\,,\,16\,,\,9\,,\,0$

この中で，$(x-2)^2=24\,,\,21$ は，x が整数にならないので，$(x-2)^2=0\,,\,9\,,\,16$

よって，$x-2=0\,,\,\pm3\,,\,\pm4$

従って，求める整数は，$x=-2\,,\,-1\,,\,2\,,\,5\,,\,6$ となる．

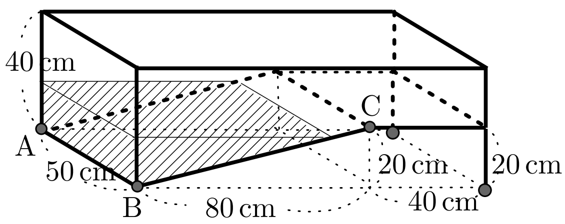
4 縦，横，高さが，50 cm , 120 cm , 40 cm の直方体を変形した図のような水槽(すいそう)がある．この水槽に毎分 10 ℓ の割合で水を注ぎ入れた．注ぎ入れ始めて t 分後の，線分 AB を基準にして測った水位を x cm とすると，t は x の関数になる．このとき，次の問に答えなさい．なお，$1\,\ell=1000\,\mathrm{cm}^3$ である．

(1) $0\leqq x\leqq 20$ のとき，t を x を使って表しなさい．

(2) 水が点 C に達するのは入れ始めて何分後か調べなさい．

(3) $20<x\leqq 40$ のとき，t を x を使って表しなさい．

(4) $0\leqq x\leqq 40$ の範囲で，$x\,,\,t$ の関係をグラフにして，解答用紙の所定の場所に書き入れなさい．



(解) (1) このとき，水の量は，直角を挟む 2 辺の長さが x cm , $x\times\dfrac{80}{20}=4x$ cm の直角三角形を底面とし，高さを 50 cm とする三角柱の体積に等しい．よって，

$$\frac{\frac{1}{2}\times x\times 4x\times 50}{1000}=10\,t$$

これを計算して，$t=\dfrac{1}{100}x^2$

(2) $x=20$ だから，(1) より，$t=\dfrac{1}{100}\times 20^2=4$

よって，入れ始めて 4 分後．

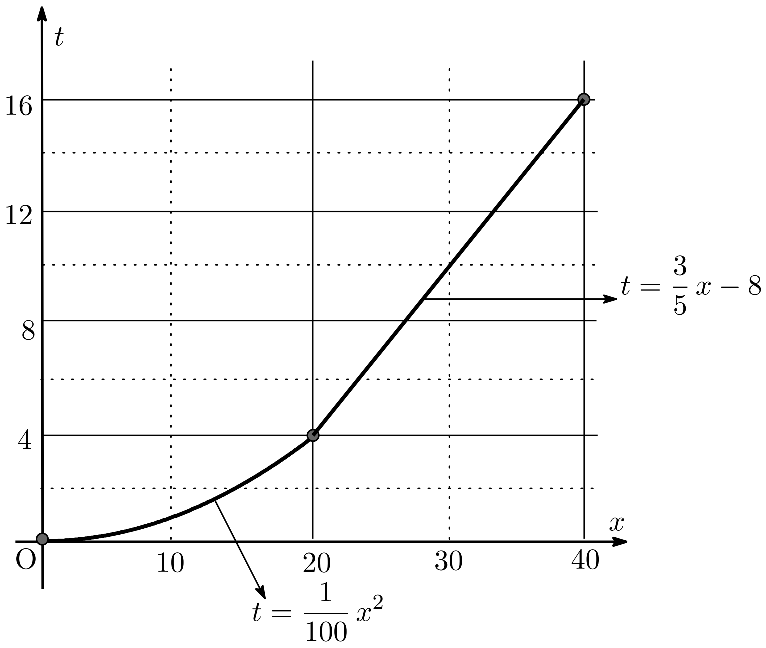
(3) $20<x\leqq 40$ のとき，水の量は，直角を挟む 2 辺の長さが 20 cm , 80 cm の直角三角形を底面とし，高さを 50 cm とする三角柱の体積に，3 辺が $(x-20)$ cm , 120 cm , 50 cm の四角柱の体積を加えたものに等しい．よって，

$$\frac{\frac{1}{2}\times 20\times 80\times 50}{1000}+\frac{120\times(x-20)\times 50}{1000}=10\,t$$

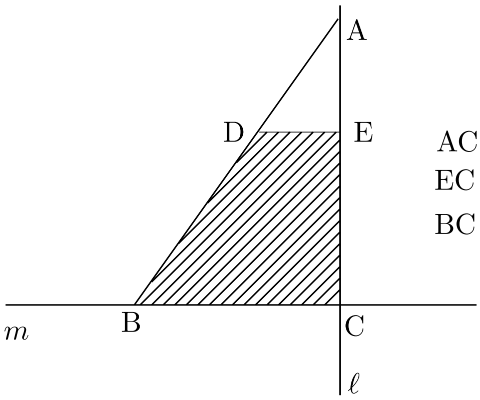
よって，$3x-40=5\,t$

従って，$t=\dfrac{3}{5}x-8$

(4) 満水になるのは，$x=40$ だから，$t=\dfrac{3}{5}\times 40-8=16$ 分後である．よって，これまで調べたことをグラフにすると図のようになる．



$\boxed{\textbf{5}}$ 直角三角形 ABC を，直線 BC に平行な直線 DE で切り取った台形（図の斜線部分）を直線 l を軸として 1 回転して出来る立体の体積を $\mathrm{V}_1\,\mathrm{cm}^3$，直線 m を軸として 1 回転して出来る立体の体積を $\mathrm{V}_2\,\mathrm{cm}^3$ とおく．このとき，V_1，V_2 のいずれが大きいか調べなさい．



$\mathrm{AC}=12\,\mathrm{cm}$
$\mathrm{EC}=8\,\mathrm{cm}$
$\mathrm{BC}=8\,\mathrm{cm}$

(解) まず，V_1 を計算する．この立体は，大きな円錐から小さな円錐を取り去ったような図形となる．すなわち，△ABC を回転して出来る円錐の体積から △ADE を回転して出来る円錐の体積を引けばよい．

△ABC ∽ △ADE だから，$\mathrm{DE}=8\times\dfrac{12-8}{12}=\dfrac{8}{3}\,\mathrm{cm}$

よって，$\mathrm{V}_1=\dfrac{\pi}{3}\times 8^2\times 12-\dfrac{\pi}{3}\times\left(\dfrac{8}{3}\right)^2\times 4=\dfrac{8^2\pi}{3}\left(12-\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{8^2\pi}{3}\times\dfrac{104}{9}$

一方，V_2 は，下部が円柱，上部が円錐である立体の体積だから，

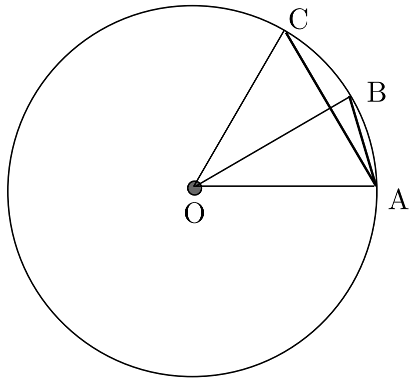
$$\mathrm{V}_2=8^2\pi\times\frac{8}{3}+\frac{\pi}{3}\times 8^2\times\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{8^2\pi}{3}\left(8+\frac{16}{3}\right)=\frac{8^2\pi}{3}\times\frac{40}{3}$$

$\dfrac{40}{3}>\dfrac{104}{9}$ だから，$\mathrm{V}_2>\mathrm{V}_1$ である．従って，V_2 が大きい．

6 円に関する次の問に答えなさい．

(1) 弦の長さとそれに対応する中心角とは比例しないことを確認したい．そこで，図のように，円 O の円周上に，$2\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AOC}$ となるように，点 A , B , C と取った．このとき，弦の長さに関して，$\mathrm{AC} \neq 2\mathrm{AB}$ が成り立つことを証明しなさい．

(2) $\pi > 3$ が成り立つことを，円に内接する多角形を描いて，証明しなさい．なお，π は円周率を表す．



(解) (1) まず，二等辺三角形 $\triangle\mathrm{ABO}$, $\triangle\mathrm{BCO}$ は，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC}$ だから，合同である．従って，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$

次に，$\triangle\mathrm{ABC}$ で考えると，三角形の 3 辺の長さに関して，$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} > \mathrm{AC}$ が成り立つ．

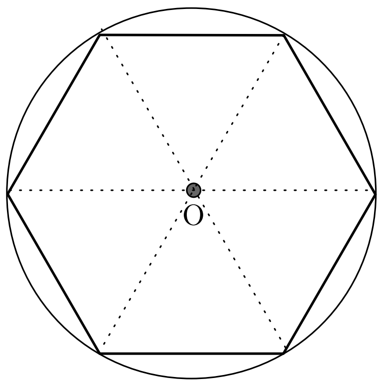
よって，$2\mathrm{AB} > \mathrm{AC}$

すなわち，$\mathrm{AC} \neq 2\mathrm{AB}$

(2) 半径 r の円に内接する正六角形を描く．この正六角形の各頂点と円の中心を結ぶと 6 個の三角形が出来るが，全て正三角形である．よって，内接する正六角形の辺の長さの総和は $6r$ となる．ここで，円周の長さを ℓ とすると，$\ell > 6r$

従って，$\pi = \dfrac{\ell}{2r} > \dfrac{6r}{2r} = 3$

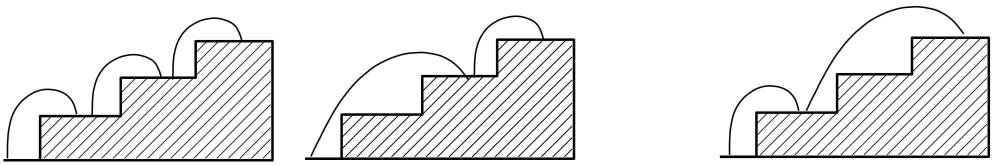
すなわち，$\pi > 3$ が成り立つ．



7 階段を「1 段登る」,「2 段まとめて登る」の 2 種類を使いながら登る方法が何通りあるか調べたい．例えば，2 段の階段では，2 通りあることが簡単に解る．また，3 段の階段ならば，図のように 3 通りある．このとき，次の場合何通りあるか調べなさい．（*hint*：最後を 1 段にする場合と 2 段にする場合に分類するとどうなるでしょう）

(1) 4 段の階段の場合，登り方は何通りありますか．

(2) 8 段の階段の場合，登り方は何通りありますか．



(1 , 1 , 1)　　(2 , 1)　　(1 , 2)

（解） (1) 4 段の登り方は，最後を 1 段にする場合と 2 段にする場合の和である．最後が 1 段の場合の数は，3 段 +1 段だから，3 段登る方法の数に等しい．また，最後が 2 段の場合の数は，2 段 +2 段だから，2 段登る方法の数に等しい．よって，4 段の階段を登る方法は，$3 + 2 = 5$ 通りある．

(2) (1) で使った考え方を使うと，5 段の階段を登る方法は，4 段の場合と 3 段の場合の和だから，$5+3 = 8$ 通り．

以下同様に，6 段の階段を登る方法は，5 段の場合と 4 段の場合の和だから，$8 + 5 = 13$ 通り．

7 段の階段を登る方法は，6 段の場合と 5 段の場合の和だから，$13 + 8 = 21$ 通り．

よって，8 段の階段を登る方法は，7 段の場合と 6 段の場合の和だから，$21 + 13 = 34$ 通り．