平成１８年度推薦入学者選抜・適性試験（数学）解答例

問題のみのダウンロード

解答は，考え方が解るように詳しく書いて下さい．考えたことが相手に伝わるような書き方が出来るかどうかも採点します．

1 次の問に答えなさい．

(1) a, b を正の数とし，$A=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $B=\sqrt{a+b}$ とおく．このとき，$A=B$, $A<B$, $A>B$ のいずれが成り立つか判断しなさい．なお，そのように判断した理由も述べること．

（解答） $A>B$ である．その理由を説明する．

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \\ &= (\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2 \\ &= a+2\sqrt{ab}+b \end{aligned}$$

一方，$B^2=(\sqrt{a+b})^2=a+b$

よって，$A^2>B^2$ だから，$A>B$ となる．

(2) 2 次方程式 $2x^2+ax+b=0$ の解が $\dfrac{1}{2}$ と -3 であるという．このとき，定数 a, b の値を求めなさい．

（解答） $\dfrac{1}{2}$, -3 が解だから，

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2+a\left(\frac{1}{2}\right)+b=0,\quad 2(-3)^2+a(-3)+b=0$$

が成り立つ．すなわち，

$$\begin{cases} 1+a+2b=0 & \cdots ① \\ 18-3a+b=0 & \cdots ② \end{cases}$$

この連立方程式を解けばよい．① $-2\times$ ② で b を消去すると，

$$-35+7a=0$$

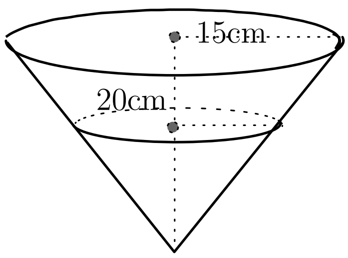
よって，$a=5$

これを①に代入して，$1+5+2b=0$

従って，$b=-3$

以上をまとめて，$a=5$, $b=-3$

(3) 図のように，底面の半径 15cm 高さ 20cm の直円錐を逆さにした容器がある．この容器に毎秒 18cm^3 の割合で水を注ぐ．t 秒後に水位が 12cm になったという．このとき，t の値を求めなさい．なお，円周率を使う必要があれば π のままでよい．



（解答） t 秒間に注いだ水の量は $18t\,\text{cm}^3$ である．一方，容器で調べる．水位が 12cm のときの水面の半径を r cm とすると，相似比より，$15:20=r:12$

よって，$15 \times 12 = 20r$ より，$r = 9$

従って，その容積は，$\dfrac{1}{3} \times \pi 9^2 \times 12 = 4 \times 9^2 \pi \,\mathrm{cm}^3$

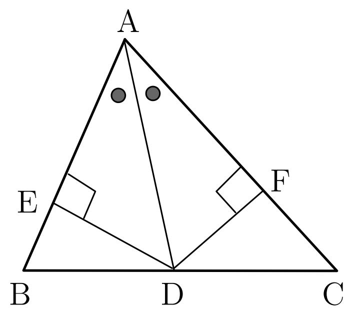
よって，$4 \times 9^2 \pi = 18t$ が成り立つので，$t = \dfrac{4 \times 9^2 \pi}{18} = 18\pi$ となる．

$\boxed{2}$ 鋭角三角形（どの角も 90° 未満である三角形）ABC がある．∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とおく．このとき，辺の長さに関して，AB : AC = BD : DC が成り立つことを次のようにして証明しなさい．

(1) △ABD , △ADC の面積をそれぞれ S_1 , S_2 とおく．このとき，$S_1 : S_2 =$ BD : DC が成り立つことを証明しなさい．

(2) $S_1 : S_2 =$ AB : AC が成り立つことを証明しなさい．

（解答）



(1) この三角形の面積を考えるとき，辺 BD , DC を底辺と考えると，高さは同じ値になる．高さを h とおくと，

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \mathrm{BD} \times h\,,\; S_2 = \frac{1}{2} \times \mathrm{DC} \times h$$

よって，$S_1 : S_2 =$ BD : DC

(2) 点 D から辺 AB , AC に垂線を下ろし，その交点を E , F とおく．このとき，△AED , △AFD は一辺共通で，２角が等しいので合同である．

従って，DE = DF

この三角形の面積を考えるとき，辺 AB , AC を底辺と考えると，

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{DE}\,,\; S_2 = \frac{1}{2} \times \mathrm{AC} \times \mathrm{DF}$$

よって，DE = DF だから，$S_1 : S_2 =$ AB : AC

$\boxed{3}$ インターネット接続会社と月額使用料金を契約するとき，次の２種類の契約方法があるという．このとき，次の問に答えなさい．

<u>契約方法 (A)</u>：利用時間にかかわらず一定金額 3000 円を支払う．

<u>契約方法 (B)</u>：基本料金 300 円に，利用時間に応じて，20 時間までは 1 分間 1 円の割合で，20 時間を超えた部分は 1 分間 2 円の割合で計算した料金を加算して支払う．

契約方法 (B) について，利用時間 x 時間のときの料金を y 円とする．

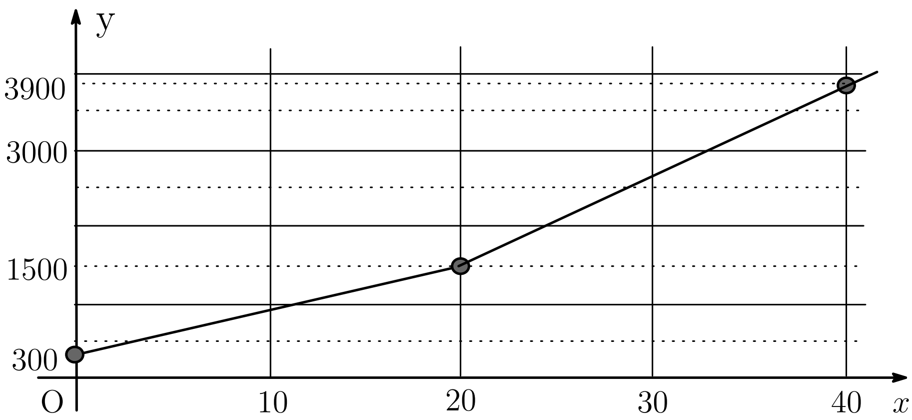
(1) x , y の関係を表すグラフを座標平面に書き入れなさい．

(2) $x \geqq 20$ のとき，y を x を使って表しなさい．

(3) 契約方法 (A) が有利になるのは，何時間を超えて利用したときか．

（解）

(1) 点 $(0\,,\,300)$ を通り，$x \leqq 20$ までは傾き 60 の直線，$x > 20$ では傾き 120 の直線になる．
すなわち，3 点 $(0\,,\,300)\,,\,(20\,,\,1500)\,,\,(40\,,\,3900)$ を通る折れ線だから，図のようなグラフになる．



(2) 20 時間を超えた部分は 1 時間あたり 120 円だから，
$y = 120x + k$ とおける．
$x = 20$ のとき $y = 1500$ だから，$1500 = 120 \times 20 + k$
よって，$k = 1500 - 2400 = -900$ となり，

$$y = 120x - 900$$

(3) 契約方法 (B) で月額料金が 3000 円となるのは，
$120x - 900 = 3000$ を解いて，

$$x = \frac{3000 + 900}{120} = 32.5$$

従って，32.5 時間（32 時間 30 分でも可）を超えて利用すると契約方法 (A) が有利になる．

4 20 円硬貨と 12 円硬貨の 2 種類しかない国がある．このとき，次の問に答えなさい．

(1) おつりが要らないようにして 240 円の品物を買いたい．20 円硬貨 x 枚，12 円硬貨 y 枚を使って支払うとする．(ただし，$x > 0\,,\,y > 0$)

(i) $x\,,\,y$ が満たす式を書きなさい．

(ii) $20 - y$ は，ある数の倍数になります．何の倍数ですか．

(iii) 条件を満たす $x\,,\,y$ の値の組を全て求めなさい．

(2) 16 円の品物を買うには，例えば，20 円硬貨を 2 枚渡し，12 円硬貨を 2 枚おつりとして受け取ればよいことが解ります．

(i) 16 円の品物を買う方法を，上の例以外に二つ挙げなさい．
なお，その例を考え出した経緯も述べること．

(ii) この国では，22 円の品物を買う方法がありません．その理由を（式を使って）説明しなさい．もちろん，22 円より多い金額を支払いおつりを受け取らない方法は除外します．

（解）

(1)

(i) $20x+12y=240$

(ii) $5x=60-3y=3(20-y)$ と変形できる．$5x$ は 5 の倍数で，3 は 5 の約数ではないので，$20-y$ は 5 の倍数となる．

(iii) $0<20-y<20$ だから，該当する値は，

$$\begin{cases}20-y=5\\x=3\end{cases},\begin{cases}20-y=10\\x=6\end{cases},\begin{cases}20-y=15\\x=9\end{cases}$$

よって，$\begin{cases}x=3\\y=15\end{cases},\begin{cases}x=6\\y=10\end{cases},\begin{cases}x=9\\y=5\end{cases}$

(2)

(i) $20x+12y=16$ が成り立つような整数の組を求めればよい．

変形すると，$5x+3y=4$ だから，5 の倍数と 3 の倍数の差が 4 になるものを調べるとよい．

$5x$ すなわち 5 の倍数は，$5\,,10\,,15\,,20\,,25\,,30\,,35\,,\cdots$

一方，$3y$ すなわち 3 の倍数は，

$3\,,6\,,9\,,12\,,15\,,18\,,21\,,24\,,\cdots$

よって，$(10\,,6)$ は例題だから，$(5\,,9)\,,(20\,,24)\,,(25\,,21)$ などがある．

言い換えると，12 円硬貨を 3 枚払い，20 円硬貨 1 枚をおつりとしてもらう方法，12 円硬貨を 8 枚払い，20 円硬貨 4 枚をおつりとしてもらう方法，20 円硬貨を 5 枚払い，12 円硬貨 7 枚をおつりとしてもらう方法などがある．

（注意）例は 2 つでよい．上記以外で該当するものが含まれていても構わない．

(ii) $x\,,y$ を整数として，$22=20x+12y$ が成り立たなければならない．

すなわち，$11=10x+6y=2(5x+3y)$

$5x+3y$ は整数だから，$2(5x+3y)$ は偶数である．一方 11 は奇数である．

従って，$22=20x+12y$ が成り立つような整数の組 $x\,,y$ は存在しない．つまり，22 円の買い物は出来ない．